Připomeň: (M,ρ) metrický prostor, $K \subseteq M$. $\bar{R}$. K je kompaktní, jestliže $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ $\exists \{x_{n_k}\}$ konvergentní: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$.

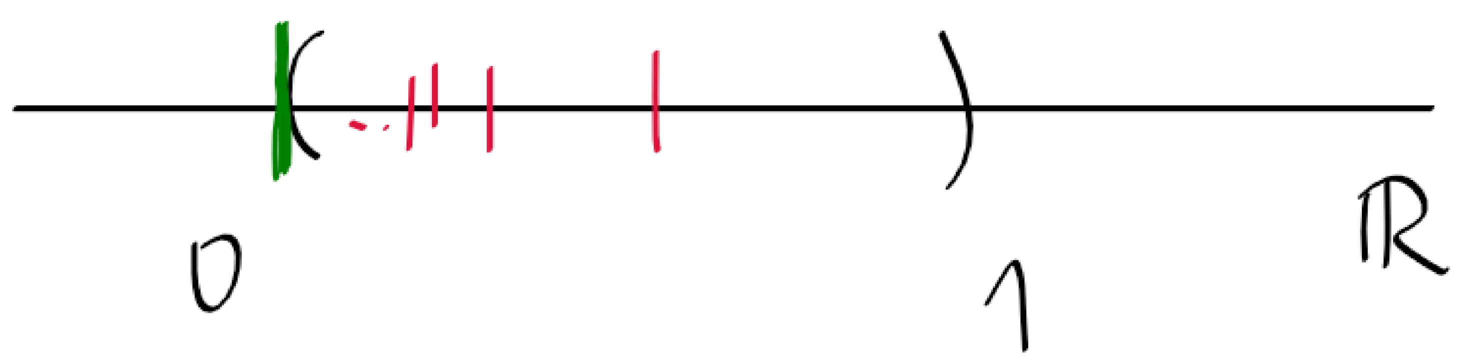
Příklad: $(M,\rho) = (\mathbb{R}, \rho_e)$, $K = (0,1)$.

K není kompaktní. Podle def.:

$\exists \{x_n\} \subset (0,1)$ $\forall \{x_{n_k}\}$ konvergentní:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \notin (0,1)$$

Položme $x_n = \frac{1}{2n}$



$0 = \lim x_n$. Ale my víme, že libovolná podposl má také limitu $0 \notin (0,1)$.

Celkem: $(0,1)$ není komp. | Nicméně $[0,1]$ je komp.

Jiný důkaz nekomp. $(0,1)$. 2 předpoklady

Podle V51 spoj. fce na komp. nabývá extrému.

Ale $f(x) = x$, $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale f nenabývá extrému.

$\Longrightarrow$ nejsou splněny předp. V51.

Protože f je spojitá, jediné vysvětlení je, že $(0,1)$ není komp.

Definice 52: (Omezená množina) Buď (M,ρ) mp.

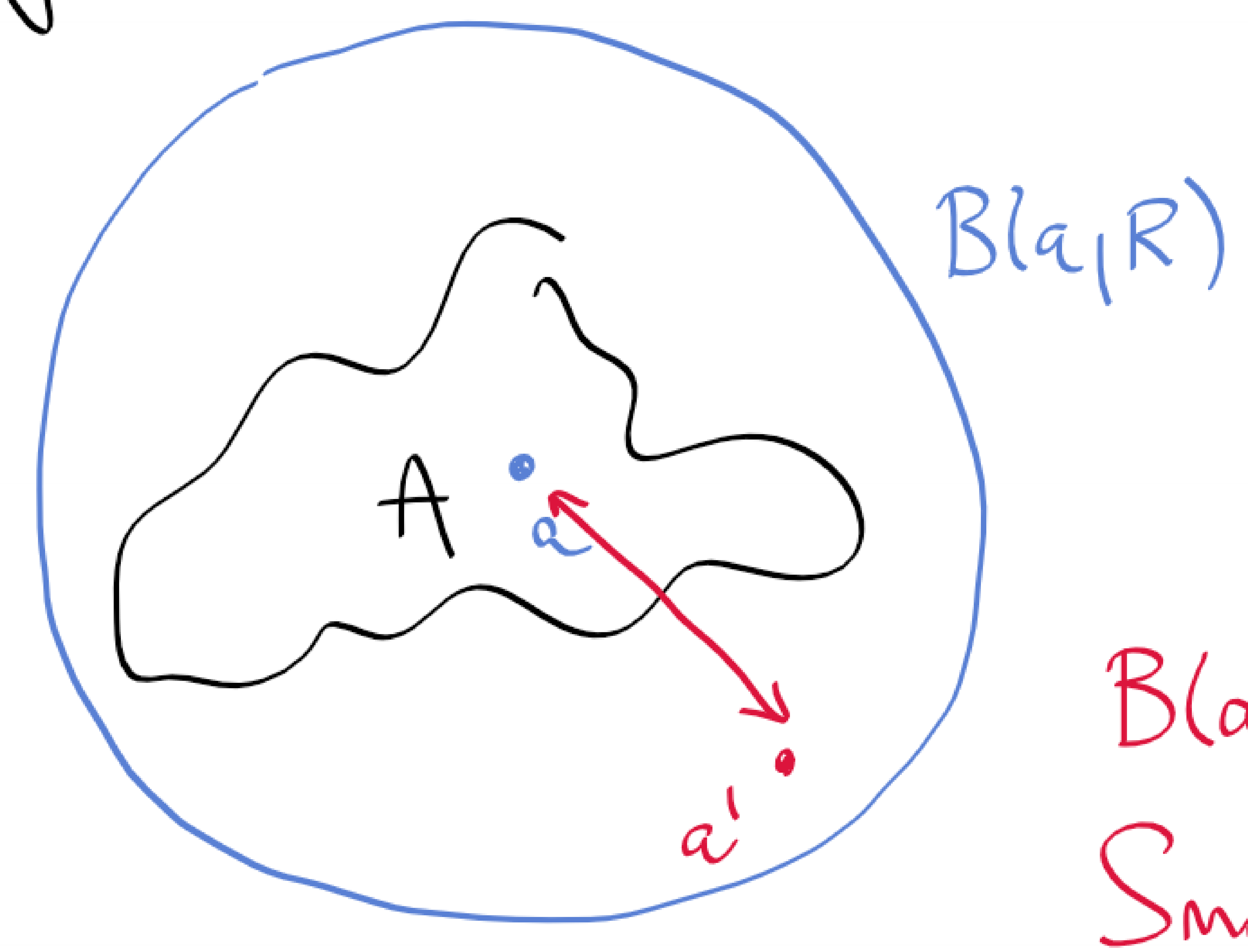
$A \subseteq M$ je omezená, pokud

$\exists a \in M \ \exists R > 0 : A \subseteq B(a,R)$.

Tj. A je obsažena v nějaké kouli v (M,ρ).

Příklad 53

• A je omezená $\iff$ $\forall a \in M$ $\exists R>0$: $A \subseteq B(a,R)$.



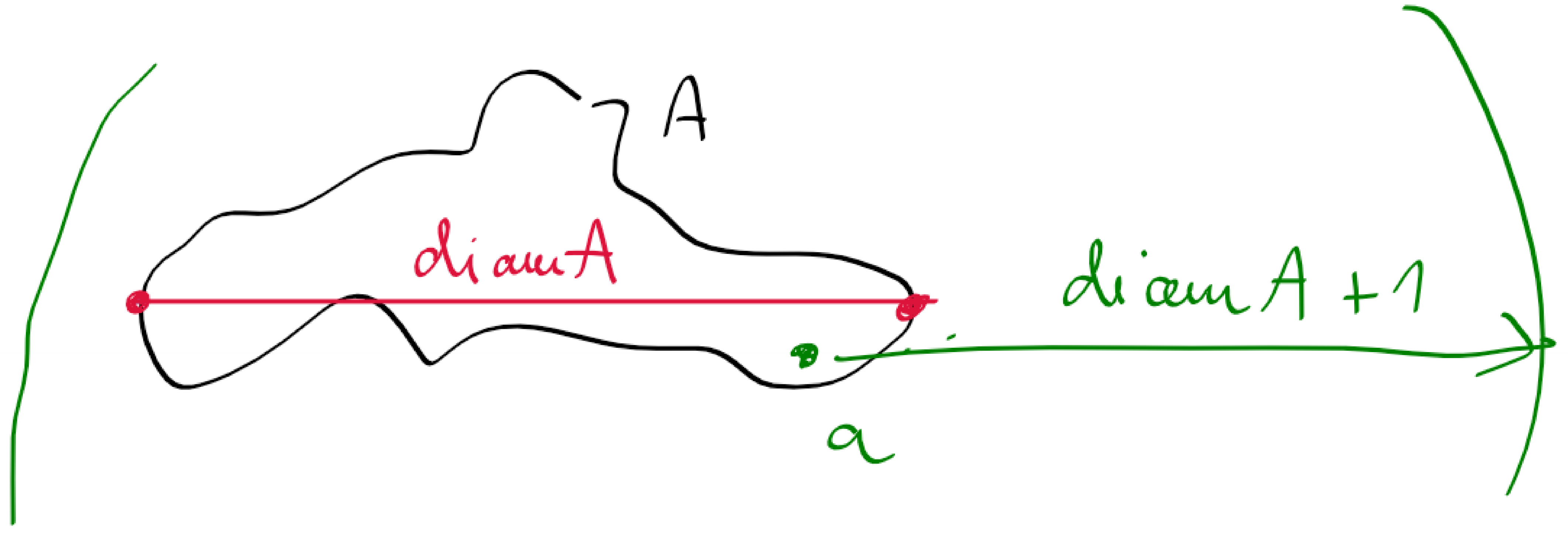
$B(a', R+\rho(a,a')) \supseteq A$.

Snadno z Δ-ner.

• A je omezená $\iff$ $\operatorname{diam} A < \infty$, kde

$\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$

[např. $a \in A$, $R = \operatorname{diam} A + 1$: $B(a,R) \supseteq A$]



• $[0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená

$\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (osa x) je neomezená.

Věta 54: (Charakterizace komp. mn. v $\mathbb{R}^d$)

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je kompaktní $\iff$

$\iff$ A je uzavřená a omezená.

Důkaz: ($\Rightarrow$) Buď A kompaktní v $\mathbb{R}^d$.

A je uzavřená: Ukážeme, že z A „nelze vykonvergovat". Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ je konverg., $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Podle definice komp. $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní: $\lim x_{n_k} \in A$. Ale protože $\{x_n\}$ má lim. x, všechny podposl. mají lim. x, $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in A$.

A je omezená: Kdyby A byla neomezená, pak pro libovolný prvek $a \in \mathbb{R}^d$ platí

$$\forall R > 0 : \ A \not\subseteq B(a, R).$$

Tedy

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in A \setminus B(a, n)$$

máme (rekurzivní vybranou) posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$, že:

Tvrdím, že $\{x_n\}$ svědčí o nekompaktnosti A. (To bude spor s předp. komp. A.)

Dokážeme, že žádná podposl $\{x_n\}$ nemá lim.

Zvolme lib. podposl. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Kdyby $\exists x \in \mathbb{R}^d$; $x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$.

$$\Longrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq k_0 : \ \|x_{n_k} - x\| < 1.$$

Ale my víme, že $\|x_{n_k} - a\| \geq n_k$ podle výroku (*).

$$\|x_{n_k} - x\| \geq \|x_{n_k} - a\| - \|a - x\| \qquad (\Delta\text{-ner})$$

Pro dost velká k je to spor:

$$1 > \|x_{n_k} - x\| \geq \underbrace{n_k - \underbrace{\|a - x\|}_{\text{konstanta}}}_{\text{roste do } \infty} \quad (k \to \infty) \ ↯.$$

V tomto je obsažen Dk., že konvergentní posloupnost v $\mathbb{R}^d$ je omezená.

Idea: A je neomezená $\Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A$ neomezená posloupnost $\Rightarrow \{x_n\}$ nemá žádnou k. podposl. $\Rightarrow$ A není komp.

$(\Leftarrow)$ nechť A je uzavřená & omezená $(A \subseteq \mathbb{R}^d)$. Chceme: A je komp.

Budiž dána $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ libovolná.

Chceme: $\exists \{x_{n_k}\}: \lim x_{n_k} \in A$.

Použijeme Bolzanovu-Weierstrassovu V:

[Libovolná omezená posl. $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ má konvergentní podposloupnost.]

Protože $\{x_n\}$ je omezená (neboť A je omezená a $\{x_n\} \subseteq A$), je omezená i posloupnost prvních souřadnic.

Označme $\mathbb{R}^d \ni x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots, x_n^d)$

Tj. je omezená posloupnost $\{x_n^1\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$.

Podle B-W: $\exists$ posloupnost $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ indexů (rostoucí), že $\{x_{n_k}^1\}$ je konvergentní.

Označme $x^1 = \lim x_{n_k}^1$.

---

nyní použijeme analogicky B-W nejen na $\{x_{n_k}^2\}_{n=1}^{\infty} \rightsquigarrow$ najdeme $\{n_k^{(2)}\} \subseteq \mathbb{N}$ tak, že existuje $x^2 = \lim x_{n_k^{(2)}}^2$.

Atd. vybíráme podposl. podposl. podposl., celkem d-krát použijeme B-W.

Dostaneme posloupnost indexů $\{n_k^{(d)}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$

tak, že $\forall i \in \{1, \dots, d\} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k^{(d)}} = x_i$.

Celkem: $x_{n_k^{(d)}} \longrightarrow x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Tj. máme limitu x jisté podposloupnosti $\{x_n\}$.

Ale díky uzavřenosti A ale

$\lim x_{n_k^{(d)}} \in A$ („nelze nyk.“). $\boxtimes$

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROM.

Definice 55 Buď (M, ρ) MP, $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in M$

Řekneme, že f má v bodě a:

- (globální) maximum, pokud

$$\forall x \in M : f(x) \leq f(a)$$

- ostré (glob.) maximum, pokud

$$\forall x \in M \setminus \{a\} : f(x) < f(a).$$

- lokální maximum, pokud

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in B(a, \delta) : f(x) \leq f(a)$$

- ostré lok. max, pokud

..... $P(a, \delta) := B(a, \delta) \setminus \{a\}$ ...

---

minimum def. pomocí opačné nerovnosti.

Říkáme, že a je bodem (...) maxima.

Věta 56: (nutná podmínka pro extrém)

Nechť $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ lokální extrém. Pak

$$\forall i \in \{1,\dots,d\}: \quad \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0 \lor \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \text{ neexistuje.}$$

Důkaz: Zvolme $i \in \{1,\dots,d\}$ a položme

$$g(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_d)$$

i-tá pozice

(i-tá parciální fce f v bodě a).

Předpokládejme, že existuje $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \overset{\text{def}}{=} g'(0)$.

Tvrdím, že g má v 0 lokální extrém.

Jasné.

Podle Fermatovy věty $g'(0)$ (ex.!) $= 0$.